
Faciliter l'identification bayesienne à partir de mesures de champ par la méthode des surfaces de réponse et l'expansion de Karhunen Loeve

Christian Gogu^{*} — Raphael Haftka^{**} — Rodolphe Le Riche^{***}

^{*} Institut Clément Ader, Université Toulouse III, 31062 Toulouse cedex 9, France

^{**} Mechanical & Aerospace Eng., University of Florida, 32611 Gainesville, FL, USA

^{***} CNRS, Ecole des Mines de Saint Etienne, 42023 Saint Etienne cedex 2, France

Correspondance: christian.gogu@gmail.com

RÉSUMÉ. La méthode d'identification bayesienne présente l'avantage de pouvoir tenir compte de différentes sources d'incertitude présentes dans le problème et de quantifier la confiance avec laquelle les propriétés sont identifiées. Son application sur un problème d'identification de propriétés élastiques orthotropes à partir de mesures des champs des déplacements pose cependant des problèmes de coût numérique. Nous proposons de résoudre ce défi par l'utilisation de méthodes de réduction de dimensionnalité (analyse en composantes principales) et la méthode des surfaces de réponse. Cette approche est testée sur des mesures de champ simulées, résultant dans l'identification de la distribution jointe de probabilité des quatre propriétés élastiques orthotropes.

ABSTRACT. The Bayesian identification approach has the advantage of its ability to account for different sources of uncertainty in the problem and to quantify the confidence in the identified properties. Its application on a problem of identifying orthotropic elastic constants from full field displacements poses however computational cost issues. We propose to solve the corresponding challenge by the use of dimensionality reduction methods (principal components analysis) and the response surface methodology. The approach is tested with simulated full field measurements, leading to the identification of the joint probability distribution of the four orthotropic elastic constants.

MOTS-CLÉS : Identification bayesienne, propriétés élastiques orthotropes, mesures de champ, décomposition POD, analyse en composantes principales, méthode des surfaces de réponse.

KEYWORDS: Bayesian identification, orthotropic elastic constants, full field measurements, POD decomposition, principal component analysis, response surface methodology .

1. Introduction

Les méthodes d'identification des paramètres d'un modèle (e.g. propriétés matériaux) ont pour but de déterminer les propriétés qui donnent le meilleur accord entre les prédictions d'un modèle et un jeu de mesures expérimentales (Björck 1996, Tarantola 2004). L'identification bayésienne permet de tenir compte des différentes sources d'incertitude dans l'expérience ou la modélisation et permet d'obtenir une distribution de probabilité pour les propriétés identifiées (Kaipio et Somersalo 2005). Un défi majeur dans l'application de la méthode bayésienne reste néanmoins le coût numérique, essentiellement dû à la phase de propagation d'incertitudes.

Nous nous intéresserons dans cet article à l'application de la méthode bayésienne à l'identification des quatre propriétés élastiques orthotropes d'un matériau composite à partir de mesures simulées des champs des déplacements sur une plaque trouée en traction. Ce problème a été souvent considéré en identification (Avril et al. 2008) mais pas sous une forme bayésienne car prohibitif du point de vue numérique, essentiellement pour deux raisons.

En premier lieu, il n'existe pas de solution analytique exacte du champ des déplacements pour le problème de traction sur une plaque trouée orthotrope. Une solution éléments finis est donc le plus souvent utilisée. Ceci convient lorsqu'une méthode d'identification basée sur les moindres carrés est employée (Lecompte et al. 2005, Silva 2007). Dans le cas de l'identification bayésienne en revanche, la simulation doit être répétée des centaines de millions de fois, ce qui est incompatible avec le coût de la modélisation éléments finis.

Deuxièmement, une représentation du champ des déplacements point par point (i.e. pixel par pixel), sachant qu'il y a typiquement des milliers à des centaines de milliers de points, interdit tout traitement statistique direct. En effet cette taille est bien au delà des capacités numériques actuelles lorsque l'on doit calculer la corrélation entre deux champs pour chaque simulation.

Pour résoudre ce double problème de coût numérique nous proposons ici d'utiliser une approche basée sur la méthode d'expansion de Karhunen Loeve (également connue sous le nom de décomposition POD) en combinaison avec la méthode des surfaces de réponses.

La suite de l'article est organisée comme suit. Dans une première partie le problème d'identification à partir d'un essai de traction sur plaque trouée est décrit. Dans un second temps nous présentons les aspects théoriques de la décomposition POD. Cette méthode est ensuite appliquée aux champs de déplacements. Nous construisons ensuite les surfaces de réponse nécessaires pour l'identification bayésienne. Enfin nous présentons les résultats de cette identification à partir de mesures simulées ainsi que quelques perspectives.

2. Description du problème

Nous considérons dans cet article le problème d'identification de propriétés élastiques orthotropes d'un matériau composite à partir de mesures des champs des déplacements. Pour l'obtention des mesures de champ nous considérons l'expérience suivante. Un test de traction est réalisé sur une plaque trouée. La plaque composite en fibre de carbone/époxy a une séquence d'empilement de $[45, -45, 0]_s$ et l'épaisseur du pli est de 0.16 mm. Les dimensions de la plaque sont données dans la Figure 1. La force de traction appliquée est de 1200 N. Les champs des déplacements U , V sont définis comme étant selon la direction 1, respectivement 2.

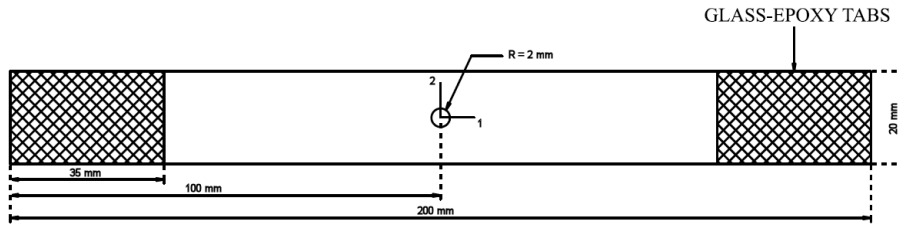


Figure 1. Géométrie de l'échantillon.

Nous considérons que les mesures des champs des déplacements lors de la traction sont effectuées sur une surface de $20 \times 20 \text{ mm}^2$ centrée sur le trou. Il est à noter que dans cet article nous n'effectuons pas l'expérience proprement dite mais utiliserons des mesures simulées à partir des simulations éléments finis auxquelles du bruit blanc gaussien est rajouté.

La plaque est modélisée sous le code éléments finis Abaqus avec 8020 éléments de type S4R (quatre nœuds par élément, intégration réduite). Le maillage éléments finis dans la zone proche du trou est représenté dans la Figure 2. La surface sur laquelle nous considérons les mesures des champs des déplacements est mise en évidence en rouge et intègre 4569 nœuds. Notez que la Figure 2 ne représente pas l'ensemble du maillage. La totalité de la plaque a été modélisée mais les champs de déplacements dans les zones lointaines par rapport au trou sont relativement homogènes, nécessitant une densité d'éléments plus faibles. Ceci explique la transition vers des éléments triangulaires de plus grande taille que l'on commence à apercevoir sur les bords de la figure.

Une étude de convergence du modèle éléments finis a été réalisée. Nous avons trouvé que l'erreur de discrétisation sur les champs de déplacements dans la zone d'intérêt autour du trou était de l'ordre de $6 \cdot 10^{-4} \%$ (par rapport à la valeur moyenne des champs). Cette erreur a été considérée acceptable pour la suite de l'étude.

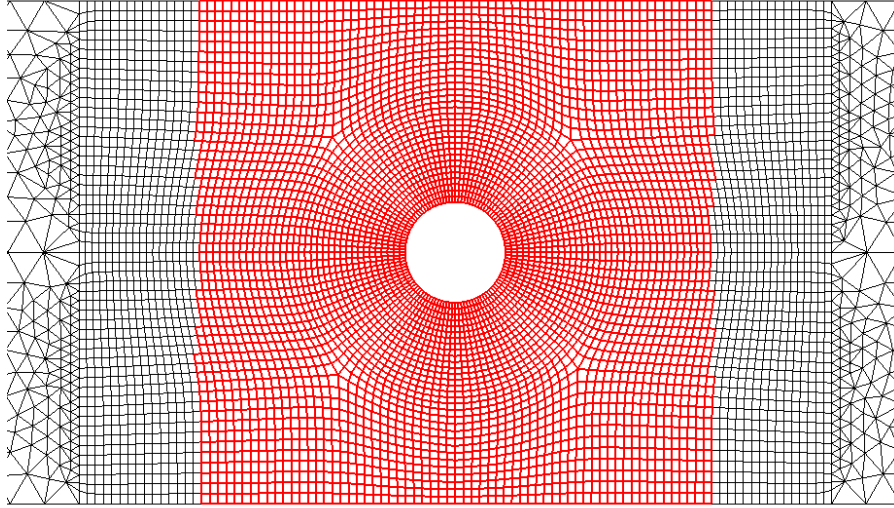


Figure 2. Maillage éléments finis dans la zone d'intérêt. La surface sur laquelle les mesures des champs sont effectuées est mise en évidence en rouge.

Les champs des déplacements U et V doivent servir à l'identification bayésienne des quatre propriétés élastiques orthotropes du pli : le module de Young dans le sens longitudinal (E_1), dans le sens transverse (E_2), le coefficient de Poisson (ν_{12}) et le coefficient de cisaillement (G_{12}).

En vue d'effectuer cette identification nous sommes néanmoins confrontés à plusieurs problèmes. Tout d'abord le modèle éléments finis est cher pour être utilisé dans le cadre de l'identification bayésienne, nécessitant la propagation d'incertitude. D'autre part un champ des déplacements est décrit par un grand nombre de points (4569 points par champ). Comme l'approche bayésienne requiert le calcul de matrices de variances covariances entre les champs, cela rend l'utilisation de la description point par point prohibitive.

Pour résoudre le premier point nous utiliserons la méthode des surfaces de réponse en construisant une approximation des champs en fonction des paramètres qui nous intéressent. Concernant le deuxième point nous utiliserons une réduction de dimensionnalité par la méthode d'expansion de Karhunen Loeve. Ces techniques et leurs applications seront détaillées dans les sections suivantes.

3. Décomposition orthogonale propre

3.1. Bases théoriques

Nous donnons dans cette partie une brève description théorique de l'approche d'expansion de Karhunen Loeve. Selon les domaines d'utilisation cette approche est également connue sous les noms de décomposition orthogonale propre (« proper orthogonal decomposition, POD » en anglais) ou encore de analyse en composantes principales. Pour une synthèse de différentes utilisation possibles de cette technique, notamment en mécanique des fluides, où l'approche est particulièrement populaire se référer à Lucia et al. (2004).

Considérons un vecteur $\mathbf{U}^i \in \mathbb{R}^n$ comme étant la représentation vectorielle d'un champ (par exemple champ des déplacements). Dans ce cas la taille n du vecteur est typiquement de l'ordre de plusieurs milliers.

Le but de l'approche POD est de construire une base de dimension réduite pour la représentation d'un certain nombre d'échantillons des champs $\{\mathbf{U}^i\}_{i=1..N}$, dénommés snapshots.

Soient Φ_k $k=1..K$ les vecteurs de la base orthogonale de dimension réduite recherchée. Les snapshots peuvent alors être approximés dans cette base sous la forme suivante :

$$\mathbf{U}^i = \sum_{k=1}^K \alpha_{i,k} \Phi_k = \sum_{k=1}^K \langle \mathbf{U}^i, \Phi_k \rangle \Phi_k \quad (1)$$

où les coefficients $\alpha_{i,k}$ sont donnés par la projection orthogonale des vecteurs $\mathbf{U}^i$ sur la base des Φ_k $k=1..K$.

La décomposition POD cherche à trouver les vecteurs Φ_k minimisant l'erreur de représentation des échantillons $\{\mathbf{U}^i\}_{i=1..N}$:

$$\min \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \left\| \mathbf{U}^i - \sum_{k=1}^K \alpha_{i,k} \Phi_k \right\|_{L2}^2 \quad (2)$$

La réduction de dimension obtenue par la représentation sous la forme des $\mathbf{U}^i$ est de N à K . L'ordre de troncature K doit être sélectionné de sorte à ce que l'erreur dans la représentation approximative $\mathbf{U}^i$ de $\mathbf{U}^i$ soit en dessous d'un certain seuil. Sélectionner la valeur de K est toujours spécifique au problème donné et un critère d'erreur possible est donné à la fin de cette partie.

L'avantage majeur de la décomposition POD réside dans le fait qu'elle propose une approche systématique pour la construction de la base Φ_k $k=1..K$ à partir des échantillons $\{U^i\}_{i=1..N}$. La procédure garantit que pour un ordre de troncature donné on ne peut pas trouver de base représentant mieux le sous espace des échantillons.

La base Φ_k $k=1..K$ est construite à partir de la matrice suivante:

$$X = \begin{pmatrix} U_1^1 & \dots & U_1^N \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ U_n^1 & \dots & U_n^N \end{pmatrix} \quad (3)$$

Notez que dans la méthode POD les vecteurs U^i doivent avoir une moyenne. Si cela n'est pas le cas il faut soustraire la valeur moyenne de composantes de chaque vecteur.

Les vecteurs Φ_k $k=1..K$ de la base sont ensuite obtenus par décomposition en valeurs singulières de la matrice X , ou de manière équivalente en calculant les vecteurs propres de XX^T . La décomposition en valeurs singulières permet d'écrire :

$$X = \Phi \Sigma \Lambda^T \quad (4)$$

où Φ est la matrice des vecteurs colonnes Φ_k . La fonction `svd()` dans Matlab peut par exemple être utilisée pour la décomposition en valeurs singulières.

Un critère d'erreur ε pour la troncature peut être alors défini par la somme des normes des erreurs de représentation :

$$\sum_{i=1}^N \left\| U^i - \sum_{k=1}^K \alpha_{i,k} \Phi_k \right\|_{L2}^2 \leq \varepsilon \sum_{i=1}^N \|U^i\|_{L2}^2 \quad (5)$$

où $\varepsilon = 1 - \left(\sum_{j=1}^K \sigma_j^2 / \sum_{j=1}^N \sigma_j^2 \right)$, et σ_j sont les termes diagonaux de la matrice

diagonale Σ . Plus ε sera petit meilleur sera l'approximation. Pour la dérivation de ce critère et des détails supplémentaires sur la décomposition POD se référer à Jolliffe (2002) ou Coelho et Breiokopf (2009).

3.2. Décomposition POD des champs de déplacements

Dans le cadre de l'identification bayésienne de propriétés élastiques orthotropes à partir de mesures de champ, le problème auquel on est confronté est le suivant. Un champ de déplacements est décrit par 4569 points, donc par des vecteurs de taille 4569 x 1. Lorsque dans le cadre de la procédure d'identification nous sommes

amenés à faire varier un certain nombre de paramètres telles les propriétés élastiques ou les dimensions de la plaque nous cherchons une base de faible dimensionnalité qui puisse rendre compte de ces variations.

Sur le problème de la plaque trouée nous cherchons à rendre compte des variations dans les paramètres suivants : les propriétés élastiques du pli E_1 , E_2 , ν_{12} , G_{12} ainsi que l'épaisseur du pli t . L'épaisseur est incluse ici car nous considérons qu'il y a de l'incertitude sur sa mesure dont nous souhaitons rendre compte à travers l'identification bayésienne. Les bornes considérées pour les variations des paramètres sont données dans la Tableau 1.

Paramètre	E_1 (GPa)	E_2 (GPa)	ν_{12}	G_{12} (GPa)	t (mm)
Borne inf.	126	7	0.189	3.5	0.12
Borne sup.	234	13	0.351	6.5	0.18

Tableau 1. Bornes inférieures et supérieures sur les paramètres considérés.

Pour obtenir les échantillons (snapshots) requis pour la décomposition POD nous utilisons un hypercube latin avec 200 points à l'intérieur des bornes du Tableau 1. A chacun des points échantillonnés nous lançons une analyse par éléments finis sur la plaque trouée. Une illustration des champs de déplacement obtenus pour l'échantillon 1, ayant les paramètres $E_1=202.2$ GPa, $E_2=10.84$ GPa, $\nu_{12}=0.2142$, $G_{12}=4.989$ GPa, $t=0.1312$ mm sont donnés dans la Figure 3.

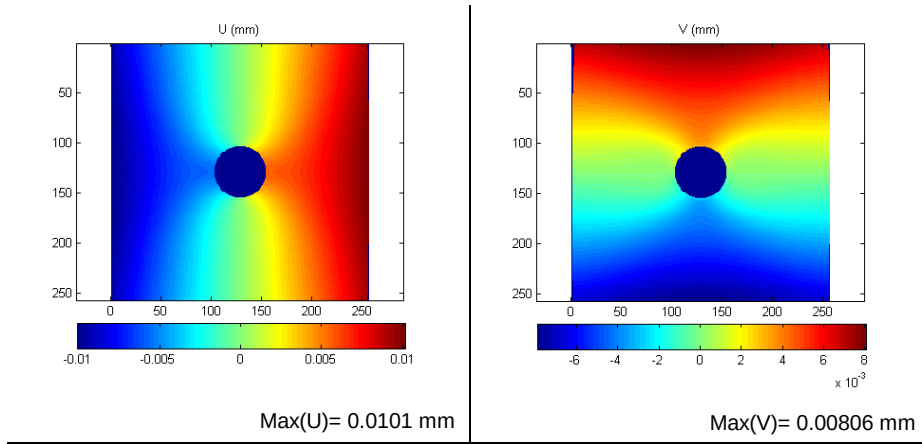


Figure 3. Champs de déplacement U et V pour l'échantillon 1.

Les valeurs des déplacements nodaux U et V à l'intérieur de la zone qui nous intéresse (en rouge sur la Figure 1) sont enregistrés sous la forme de vecteurs colonnes (de taille 4569×1). Pour chacun des deux champs U et V nous obtenons ainsi une matrice X de taille 4569×200 .

Notons qu'à cause des conditions aux limites lors de la modélisation, le champ U a pu être obtenu avec une valeur moyenne nulle mais pas le champ V . Il a donc été nécessaire pour V de soustraire la moyenne pour la construction de X :

$$X = \begin{pmatrix} V_1^1 - \overline{V}_1 & \dots & V_1^N - \overline{V}_N \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ V_n^1 - \overline{V}_1 & \dots & V_n^N - \overline{V}_N \end{pmatrix} \quad (6)$$

Les modes POD sont alors calculés par décomposition en valeurs singulières de la matrice X . Cette décomposition a été effectuée deux fois : une fois pour les 200 échantillons du champ U et une nouvelle fois pour les 200 échantillons du champ V .

3.3. Résultats de la décomposition POD

Au total 200 modes POD sont obtenus pour chacun des deux champs U et V . Les quatre premiers modes sont illustrés graphiquement dans les Figures 4 et 5.

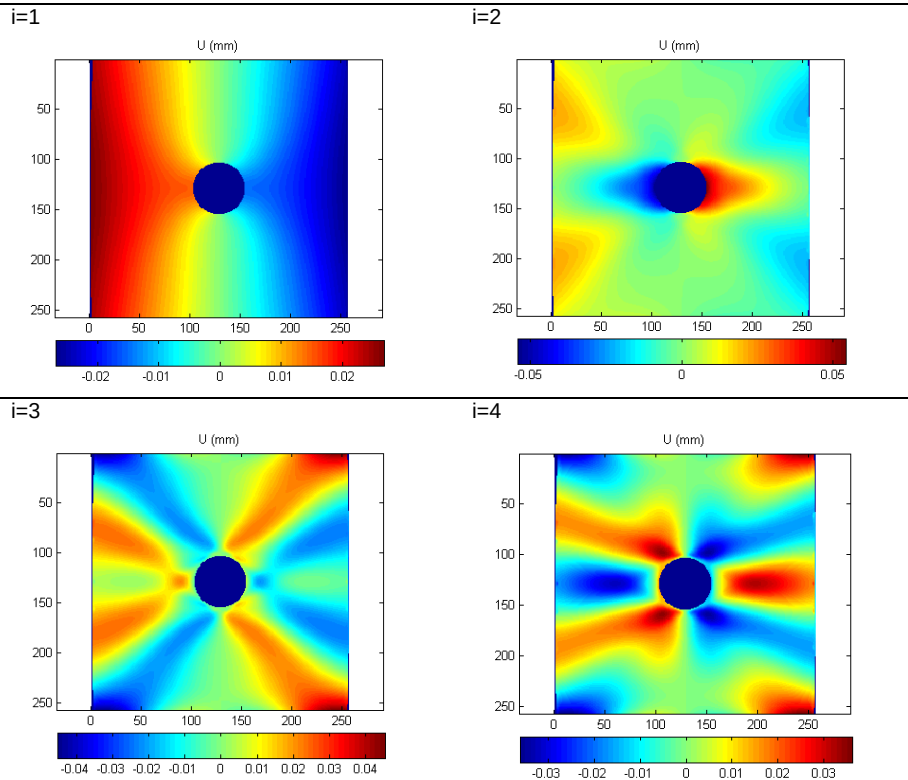


Figure 4. Quatre premiers modes POD pour le champ de déplacement U .

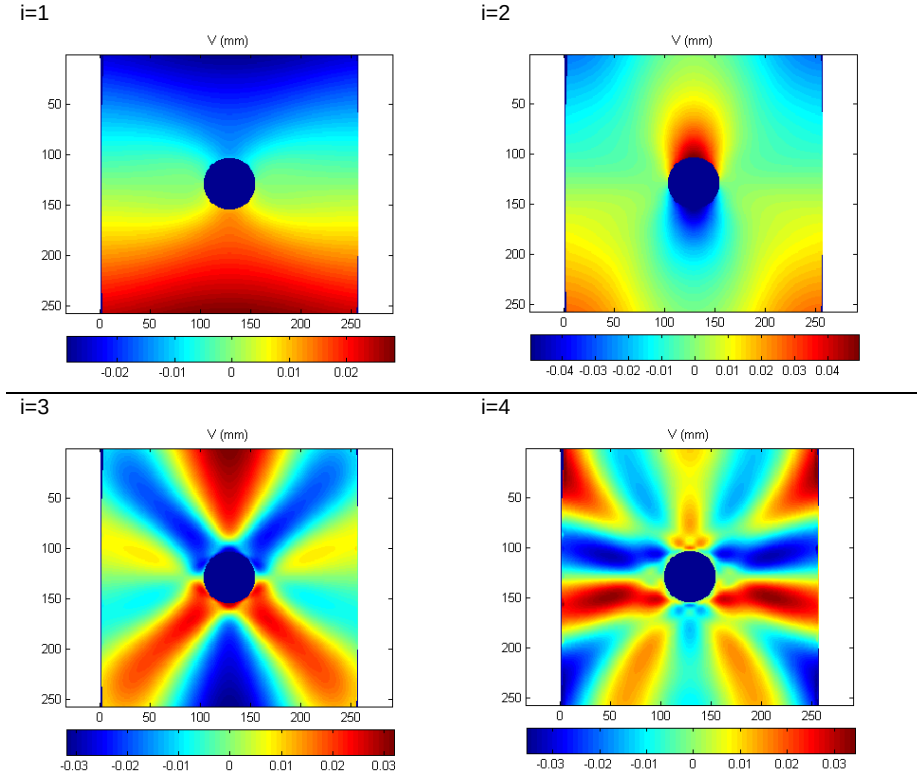


Figure 5. Quatre premiers modes POD pour le champ de déplacement V .

Une fois les modes POD obtenus il nous reste à déterminer l'ordre de troncature convenant à notre problème. En effet, même si nous avons obtenus 200 modes, typiquement nous pourrions obtenir une très bonne approximation avec une troncature bien plus réduite. Le Tableau 2 fournit le critère d'erreur pour la troncature, défini dans l'Eq. 5.

K	2	3	4	5
ε (champ U)	$2.439 \cdot 10^{-7}$	$4.701 \cdot 10^{-9}$	$7.280 \cdot 10^{-11}$	$1.211 \cdot 10^{-11}$
ε (champ V)	$1.054 \cdot 10^{-6}$	$2.900 \cdot 10^{-9}$	$4.136 \cdot 10^{-10}$	$3.517 \cdot 10^{-11}$

Tableau 2. Critère d'erreur pour l'ordre de troncature K (cf. Eq. 5).

Le critère de troncature précédent est relativement difficile à interpréter physiquement. De plus il est calculé sur la base des snapshots ayant servi pour la construction de la base POD. Or dans le but de l'identification nous sommes également intéressés par exprimer les champs pour des combinaisons intermédiaires dans le domaine d'échantillonnage.

Nous avons donc choisi de construire un critère d'erreur supplémentaire sur la base de la méthode de validation croisée, dont le principe est le suivant : sur les N snapshots disponibles nous en utilisons $N-1$ pour construire la base POD et nous calculons l'erreur entre le champ qui a été omis et sa troncature POD. L'erreur est définie comme le maximum de la différence parmi tous les points des deux champs. En permutant successivement le champ qui est omis nous obtenons ainsi N erreurs. La racine de la moyenne de leurs carrés représente alors un critère de troncature supplémentaire que nous notons CV_{RMS} . Le Tableau 3 fournit ce critère d'erreur pour différents ordres de troncature (*N.B.*: le pourcentage est défini comme le rapport entre l'erreur et la valeur du champ au point correspondant).

	K	2	3	4	5
Champ U	CV_{RMS} (mm)	$9.35 \cdot 10^{-6}$	$1.05 \cdot 10^{-6}$	$1.65 \cdot 10^{-7}$	$7.83 \cdot 10^{-8}$
	CV_{RMS} (%)	$9.96 \cdot 10^{-2}$	$1.13 \cdot 10^{-2}$	$2.37 \cdot 10^{-3}$	$9.49 \cdot 10^{-4}$
Champ V	CV_{RMS} (mm)	$1.00 \cdot 10^{-5}$	$6.30 \cdot 10^{-7}$	$3.05 \cdot 10^{-7}$	$7.32 \cdot 10^{-8}$
	CV_{RMS} (%)	$1.10 \cdot 10^{-1}$	$4.71 \cdot 10^{-2}$	$3.71 \cdot 10^{-3}$	$1.84 \cdot 10^{-3}$

Tableau 3. Critère d'erreur par validation croisée CV_{RMS} .

Nous constatons que l'erreur de troncature converge relativement vite et qu'avec trois ou quatre coefficient POD nous obtiendrons déjà une très bonne approximation. Nous avons décidé d'utiliser quatre coefficients pour chacun des champs U et V , décision appuyée également sur une étude de la convergence de la sensibilité des champs aux propriétés élastiques (cf. Gogu (2009), Chapitre 6 pour plus de détails).

Il est important de noter ici qu'effectuer une troncature à $K=4$ représente une réduction de dimensionnalité de 4569 (nombre de nœuds dans le champ de déplacement) à 4 (nombre de coefficients POD requis pour exprimer les variations du champ).

Enfin, nous tenons également à attirer l'attention sur le fait que la projection sur la base POD a un effet de filtrage du bruit dans les champs expérimentaux. Cet effet de filtrage est également étudié plus en détail dans Gogu (2009), Chapitres 6 et 7 et nous concluons que le filtrage est bénéfique par rapport à notre problème.

4. Approximation par surfaces de réponse des coefficients POD

A ce stade nous avons construit une base POD ce qui a permis d'obtenir une réduction de dimensionnalité très significative. Il reste cependant le second verrou lié au coût numérique de la propagation d'incertitudes dans le cadre de l'identification bayésienne. Pour résoudre ce second point nous construisons des approximations par surfaces de réponse des coefficients POD.

Nous cherchons une surface de réponse polynomiale (SRP) sous la forme $\alpha_k = \text{SRP}(E_1, E_2, \nu_{12}, G_{12}, h)$, où $E_1, E_2, \nu_{12}, G_{12}$ sont les propriétés élastiques orthotropes du pli et h est l'épaisseur totale de la plaque, sur laquelle nous considérons qu'il y a de l'incertitude de mesure.

Des approximations SRP de degré trois ont été construites à partir des mêmes 200 échantillons qui ont également servi à la construction de la base POD (cf. partie 3.2). Pour tester les surfaces de réponse obtenues nous utilisons les critères d'erreur donnés dans le Tableaux 4 et 5 pour chacun des quatre premiers coefficients POD des champs U et V . La deuxième ligne des tableaux donne la valeur moyenne des coefficients POD parmi les 200 échantillons du plan d'expériences. La troisième ligne donne l'écart type, ce qui permet de se rendre compte de l'amplitude des variations des coefficients. La ligne quatre donne le coefficient de corrélation de l'ajustement, tandis que la ligne cinq la racine de la moyenne des erreurs au carré. Enfin, la dernière ligne donne l'erreur par validation croisée PRESS, introduite par Allen (1971), donnant une quantification supplémentaire de l'erreur.

Coefficient POD sur U	α_1	α_2	α_3	α_4
Valeur moyenne de α_i	$-4.04 \cdot 10^{-1}$	$-3.40 \cdot 10^{-5}$	$-2.20 \cdot 10^{-5}$	$-8.35 \cdot 10^{-7}$
Ecart type de α_i	$8.19 \cdot 10^{-2}$	$6.92 \cdot 10^{-4}$	$2.01 \cdot 10^{-4}$	$2.80 \cdot 10^{-5}$
R^2	0.99999	0.99993	0.99992	0.99951
Erreur RMS	$2.77 \cdot 10^{-4}$	$6.32 \cdot 10^{-6}$	$2.01 \cdot 10^{-6}$	$6.75 \cdot 10^{-7}$
Erreur PRESS	$3.61 \cdot 10^{-4}$	$7.92 \cdot 10^{-6}$	$2.67 \cdot 10^{-6}$	$9.33 \cdot 10^{-7}$

Tableau 4. Tests de précision des surfaces de réponse pour le champ U .

Coefficient POD sur V	α_1	α_2	α_3	α_4
Valeur moyenne de α_i	$-2.97 \cdot 10^{-1}$	$-9.51 \cdot 10^{-5}$	$-2.14 \cdot 10^{-5}$	$9.76 \cdot 10^{-7}$
Ecart type de α_i	$5.40 \cdot 10^{-2}$	$2.26 \cdot 10^{-3}$	$3.10 \cdot 10^{-4}$	$1.50 \cdot 10^{-5}$
R^2	0.99999	0.99992	0.99987	0.99830
Erreur RMS	$1.69 \cdot 10^{-4}$	$2.26 \cdot 10^{-5}$	$3.88 \cdot 10^{-6}$	$6.89 \cdot 10^{-7}$
Erreur PRESS	$2.45 \cdot 10^{-4}$	$3.05 \cdot 10^{-6}$	$5.27 \cdot 10^{-6}$	$1.04 \cdot 10^{-6}$

Tableau 5. Tests de précision des surfaces de réponse pour le champ V .

En comparant les métriques d'erreur (erreur RMS et PRESS) aux écarts types des coefficients POD nous avons considéré que les erreurs dans les approximations sont suffisamment petites pour pouvoir être négligées par rapport aux autres sources d'incertitude que nous allons considérer dans ce problème.

5. Identification bayésienne des propriétés élastiques

5.1. Formulation

Dans le cadre de l'identification bayésienne nous cherchons à identifier la densité de probabilité des propriétés élastiques orthotropes E_1 , E_2 , ν_{12} , G_{12} sachant les champs de déplacement mesurés sur l'essai de traction sur la plaque trouée. Cette densité est donné par la formule de Bayes qui peut s'écrire de la manière suivante :

$$\pi_{E/\alpha=\alpha^{measure}}(E) = \frac{1}{K} \pi_{\alpha/E}(\alpha^{measure}) \cdot \pi_E^{prior}(E) \quad (7)$$

où $E = \{E_1, E_2, \nu_{12}, G_{12}\}$ est la variable aléatoire jointe (dimension quatre) des propriétés élastiques du pli. $\alpha = \{\alpha_1^U, \dots, \alpha_4^U, \alpha_1^V, \dots, \alpha_4^V\}$ est la variable aléatoire jointe (dimension huit) des coefficients POD des champs U et V . $\alpha^{measure} = \{\alpha_1^{U,measure}, \dots, \alpha_4^{U,measure}, \alpha_1^{V,measure}, \dots, \alpha_4^{V,measure}\}$ est l'instance des huit coefficients POD « mesurés », obtenus en projetant les champs des déplacements mesurés sur la base POD.

L'équation donne la fonction de densité de probabilité jointe des quatre propriétés élastiques étant donné $\alpha^{measure}$. Cette densité de probabilité est égale à une constante de normalisation $1/K$, multiplié par la fonction de vraisemblance des propriétés élastiques E étant donné $\alpha^{measure}$, multipliée encore par la distribution à priori des propriétés élastiques.

La distribution à priori de E reflète les connaissances à priori que l'on peut avoir sur les propriétés élastiques (à partir de spécification du fabricant ou d'essais antérieurs par exemple). Dans notre cas nous avons supposé que l'on dispose uniquement d'informations à priori assez vagues en considérant une densité à priori avec un coefficient de variation assez grand (10%) tel que défini dans le Tableau 6. Cette distribution normale, jointe a été de plus tronquée avec les bornes données dans le Tableau 7. Ces bornes ont été considérées comme définissant un domaine raisonnable pour les propriétés qu'on cherche et présentent l'avantage de réduire le temps de calcul par rapport à un domaine non tronqué.

Paramètre	E_1 (GPa)	E_2 (GPa)	ν_{12}	G_{12} (GPa)
Valeur moyenne	155	11.5	0.3	5
Ecart type	15.5	1.15	0.03	0.5

Tableau 6. Distribution à priori normale, décorrélée considérée.

Paramètre	E_1 (GPa)	E_2 (GPa)	ν_{12}	G_{12} (GPa)
Borne de troncature basse	148	9	0.25	4.7
Borne de troncature haute	162	12	0.35	5.3

Tableau 7. Bornes de troncature sur la distribution à priori.

L'autre fonction figurant dans le membre droit de l'Equation 7 représente la fonction de vraisemblance des propriétés élastiques $\mathbf{E}$, étant donné $\boldsymbol{\alpha}^{measure}$. Cette fonction rend compte de la probabilité d'obtenir les mesures pour une valeur donnée des propriétés $\mathbf{E}$, et par conséquent elle fournit une mesure de la vraisemblance des différentes valeurs de $\mathbf{E}$ étant données les mesures. Les différentes sources d'incertitudes considérées, affectant l'identification et donc le calcul de la fonction de vraisemblance sont détaillées dans la sous-partie suivante.

5.2. Sources d'incertitudes

Une source typique d'incertitude affectant l'identification est le bruit de mesure. Dans le cas de mesures de champ nous obtenons en effet un champ bruité que nous considérons décomposable en une composante signal et une composante bruit blanc gaussien. Ce bruit est modélisé comme une incertitude sur les coefficients POD. On peut montrer que l'écart type sur les coefficients POD est égale à l'écart type du bruit blanc dans le cas de distributions gaussiennes. Pour plus de détails ainsi que la démonstration se référer à Gogu (2009).

Une autre source d'incertitude dans l'identification est due à l'incertitude dans la connaissance des autres paramètres du modèle, tels que les dimensions de la plaque. Dans notre cas nous considérons explicitement uniquement une incertitude sur l'épaisseur de la plaque. Nous avons supposé que la mesure de cette épaisseur est distribuée normalement avec une valeur moyenne de 0.96 mm (épaisseur nominale) et un écart type de 0.005 mm (précision typique d'un pied à coulisse micrométrique). Cette incertitude est propagée à travers le modèle par l'utilisation des surfaces de réponse.

Enfin, nous considérons également d'autres sources d'incertitudes telles que des alignements imparfaits entre l'échantillon et la direction de traction ou un décentrage du trou. Pour modéliser parfaitement ces sources d'incertitudes il faudrait une paramétrisation assez complexe du modèle numérique. En première approximation nous avons en revanche décidé d'en tenir compte en rajoutant un terme d'incertitude supplémentaire sur les coefficients POD.

5.3. Procédure numérique pour l'identification bayésienne

La difficulté numérique majeure pour notre problème d'identification bayésienne réside dans la construction de la fonction de vraisemblance (cf. Gogu et al (2010)

pour une description détaillée de sa construction). C'est à cet endroit que l'on retrouve les verrous numériques concernant la dimensionnalité des champs et le temps de calcul. C'est pourquoi nous utilisons les coefficients POD de dimensionnalité réduite ainsi que les surfaces de réponse correspondantes. La Figure 6 illustre sur un diagramme l'utilisation des différentes techniques mises en oeuvre pour le calcul de la fonction de la vraisemblance.

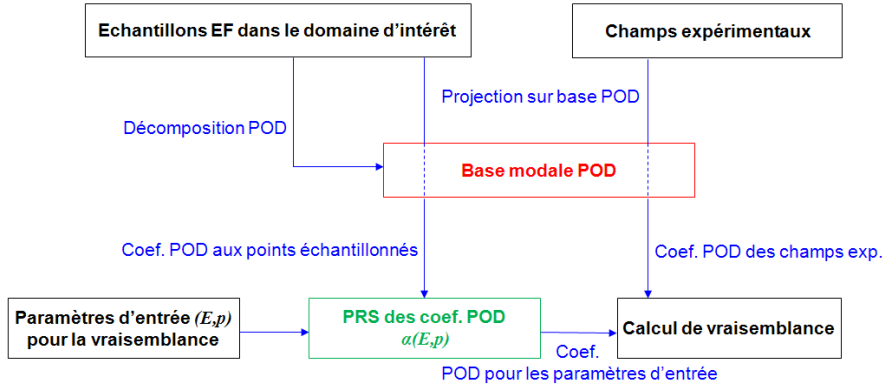


Figure 6. Diagramme illustrant l'utilisation des méthodes de réduction de coût (en vert) et de dimensionnalité (en rouge) pour le calcul de la fonction de vraisemblance.

La fonction de vraisemblance est construite point par point sur une grille en $\mathbf{E} = \{E_1, E_2, v_{12}, G_{12}\}$ de taille 17^4 à l'intérieur des bornes de troncature du Tableau 7. La taille de la grille a été choisie comme un compromis entre précision de la distribution obtenue et temps de calcul. A chaque point de la grille, $\mathbf{E}$ est fixé et nous devons évaluer la distribution $\pi_{\alpha/\mathbf{E}=\mathbf{E}^{\text{fixed}}}(\alpha)$ au point $\alpha = \alpha^{\text{measure}}$. Cette distribution est déterminée en propageant par simulation de Monte Carlo (4000 simulations) l'incertitude sur l'épaisseur de la plaque et rajoutant l'incertitude sur les coefficients POD issue du bruit de mesure et les alignements imparfaits. La distribution résultante a été trouvée proche d'une distribution multinormale ce qui a permis d'obtenir sa loi uniquement en calculant la moyenne et sa matrice de variance-covariance. La nature multinormale de cette distribution est due au fait que l'incertitude sur les coefficients POD est gaussienne et l'incertitude due à l'épaisseur est proportionnelle en $1/h$, qui pour les valeurs numériques considérées peut être assez bien approximé par une loi normale.

5.4. Identification bayésienne sur des champs simulés

La procédure d'identification bayésienne est testée sur des mesures de champ simulées. Les champs U et V ont été simulés avec le code éléments finis Abaqus avec les propriétés matériaux données dans le Tableau 8.

Paramètre	E_1 (GPa)	E_2 (GPa)	ν_{12}	G_{12} (GPa)
Valeur	155	11	0.3	5

Tableau 8. Propriétés matériaux utilisées pour l'expérience simulée.

Les champs ainsi obtenus sont relativement lisses ce qui n'est pas représentatif d'une vraie expérience, qui donnera toujours des champs plus ou moins bruités. Nous avons donc également simulé le bruit de mesure en rajoutant aux champs issus de Abaqus un bruit blanc gaussien avec un écart type de 2.5% de la valeur moyenne du champ. Les champs mesurés simulés sont représentés dans la Figure 7.

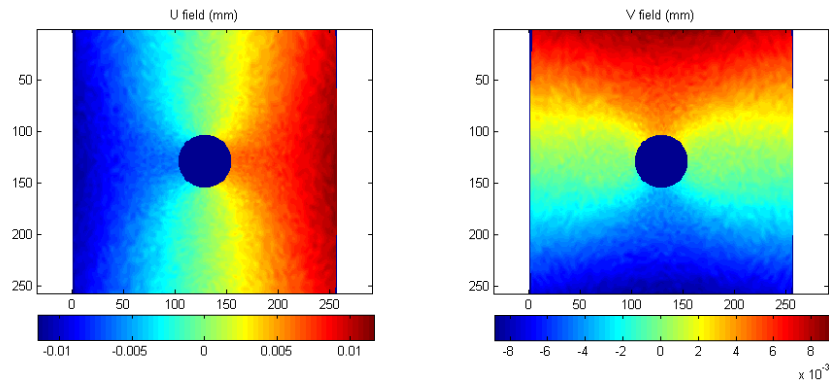


Figure 7. Champ U et V de l'expérience simulée.

En appliquant la procédure bayésienne décrite dans la section précédente nous obtenons la distribution des quatre propriétés élastiques étant données les mesures. Cette distribution est caractérisée par les valeurs moyennes et les coefficients de variation donnés dans le Tableau 9 ainsi que la matrice de corrélation donnée dans le Tableau 10.

Paramètre	E_1 (GPa)	E_2 (GPa)	ν_{12}	G_{12} (GPa)
Valeur moyenne	155	10.7	0.29	5.01
COV (%)	2.23	5.67	9.33	3.02

Tableau 9. Valeurs moyennes et coefficient de variation (COV) caractérisant la distribution identifiée pour les mesures de champ simulées.

	E_1	E_2	ν_{12}	G_{12}
E_1	1	0.43	-0.18	0.60
E_2	-	1	-0.22	-0.07
ν_{12}	-	-	1	0.62
G_{12}	-	-	-	1

Tableau 10. Matrice de corrélation (symétrique) caractérisant la distribution identifiée pour les mesures de champ simulées.

Nous constatons tout d'abord que les valeurs moyennes de la distribution identifiée sont très proches de vraies valeurs utilisées pour l'expérience simulée, ce qui est rassurant. D'autre part, nous constatons cependant, que les différentes propriétés sont identifiées avec une confiance (i.e. coefficient de variation) très variable. Ainsi le module longitudinal est identifié le plus précisément alors que le coefficient de Poisson le moins précisément. Ceci est dû au fait que les champs des déplacements sont plus sensibles aux variations de certaines propriétés (e.g. E_1) que d'autres (e.g. ν_{12}).

Enfin nous pouvons constater que les propriétés sont identifiées avec une corrélation non négligeable pour certains paramètres. Ceci est important à noter car la matrice de corrélation est rarement identifiée, or comme nous pouvons le constater, il s'avère que considérer une corrélation nulle entre toutes les propriétés et n'identifier que les écarts types peut s'avérer assez éloigné de la réalité, surtout dans des cas similaires à celui-ci, où l'on cherche à identifier l'ensemble des quatre propriétés élastiques à partir d'un seul essai sur un stratifié multi-plis et multi-orientations.

6. Conclusion

Nous nous sommes intéressés dans cet article à l'identification bayésienne de propriétés matériaux orthotropes à parti de mesures simulées de champs de déplacements. Ce problème présentait deux verrous numériques, l'un à cause de la dimensionnalité élevée des points mesures, l'autre à cause du coût des simulations éléments finis utilisées comme modèle numérique. Ces défis ont été relevés par une approche basée sur l'utilisation de la décomposition orthogonale propre en combinaison avec la méthode des surfaces de réponse.

L'approche proposée a permis l'identification de la distribution postérieure de probabilité des propriétés élastiques orthotropes. L'avantage de la méthode est de pouvoir quantifier l'incertitude (écart type) ainsi que la corrélation entre les propriétés identifiées. Ainsi nous avons trouvé que certaines propriétés sont identifiées avec une incertitude beaucoup plus faible que d'autres et qu'une corrélation non négligeable existe également. Il est important de pouvoir identifier

cette corrélation, surtout dans la perspective où les distributions seront utilisées dans le cadre d'études de fiabilité, autrement on risquerait de surestimer les incertitudes en présence.

A terme l'identification de la distribution de probabilité des propriétés élastiques devrait permettre d'améliorer les études de fiabilité. Actuellement en effet seulement la variabilité de propriétés inter-échantillons ou inter-structures est généralement considérée. Or l'incertitude issue de la mesure pour un échantillon ou une structure donné peut également être non-négligeable dans certains cas, comme nous venons de le voir. Il est important alors de tenir compte de ces deux incertitudes affectant la connaissance de propriétés matériaux.

Un avantage supplémentaire de l'approche bayésienne est sa capacité à tenir compte d'informations à priori. Même si nous n'avons pas étudié cela en détail ici, la distribution à priori permet de diminuer sur la base de connaissances à priori l'incertitude sur les propriétés qui peuvent être déterminées le moins précisément à partir de l'expérience donnée.

L'approche bayésienne est ainsi très prometteuse dans la perspective de l'amélioration des incertitudes sur les propriétés matériaux issues du processus d'identification. A terme cela peut permettre des études de fiabilité plus précises en élargissant l'ensemble des sources d'incertitudes considérées.

12. Bibliographie

- Allen DM, "Mean square error of prediction as a criterion for selecting variables." *Technometrics*, 13, 469-475, 1971.
- Avril S, Bonnet M, Bretelle AS, Grédiac M, Hild F, Ienny P, Latourte F, Lemosse D, Pagano S, and Pagnacco E, "Overview of Identification Methods of Mechanical Parameters Based on Full-field Measurements." *Exp.Mech.*, 48(4), 381-402, 2008.
- Björck A, *Numerical methods for least squares problems*. SIAM, Philadelphia, 1996.
- Coelho RF, Breikopf P, *Optimisation multidisciplinaire en mécanique: Réduction de modèles, robustesse, fiabilité, réalisations logicielles*. Hermes Science Publications, Paris, 2009.
- Gogu C, *Faciliter l'identification bayésienne des propriétés élastiques par réduction de dimensionnalité et la méthode des surface de réponse*. Thèse de doctorat en cotutelle entre l'Ecole des Mines de Saint Etienne et l'Université de Floride, 2009.
- Gogu C, Haftka RT, Le Riche R, Molimard J, Vautrin A, "Introduction to the Bayesian Approach Applied to Elastic Constants Identification", *AIAA Journal*, In Press, DOI: 10.2514/1.40922, 2010.
- Jolliffe IT, *Principal component analysis*, 2nd edition, Springer, New York, 2002.
- Kaipio JP, Somersalo E, *Statistical and computational inverse problems*. Springer, New York, 2005.

- Lecompte, D., Sol, H., Vantomme, J., and Habraken, A. M. (2005). "Identification of elastic orthotropic material parameters based on ESPI measurements." *Proc., SEM Annual Conf. and Exposition on Experimental and Applied Mechanics*.
- Lucia DJ, Beran PS, and Silva WA, "Reduced-order modeling: new approaches for computational physics." *Prog.Aerospace Sci.*, 40(1-2), 51-117, 2004.
- Silva GHC, Le Riche R, Molimard J, Vautrin A, and Galerne C, "Identification of Material Properties Using FEMU: Application to the Open Hole Tensile Test." *Adv. Exp. Mech.*, 7-8, 73-78, 2007.
- Tarantola A, *Inverse Problem Theory and Methods for Model Parameter Estimation*. SIAM, Philadelphia, 2004.