

## Vers des analyses de fiabilité à fidélité adaptative par l'utilisation de modèles en base réduite

MENZ Morgane<sup>1,2</sup>, GOGU Christian<sup>1</sup>, DUBREUIL Sylvain<sup>2</sup>, BARTOLI Nathalie<sup>2</sup>, MORIO Jérôme<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Université de Toulouse, UPS, CNRS, INSA, Mines Albi, ISAE, Institut Clément Ader (ICA), 3 rue Caroline Aigle, 31400 Toulouse

<sup>2</sup> ONERA - The French Aerospace Lab, BP 74025, 31055 Toulouse Cedex, France  
[morgane.menz@onera.fr](mailto:morgane.menz@onera.fr)

---

### RÉSUMÉ.

*Les approches d'analyse de fiabilité par échantillonnage adaptatif peuvent, bien qu'elles permettent déjà une forte réduction des temps de calculs, être très coûteuses pour des modèles numériques complexes. Un couplage entre ces approches et la modélisation en base réduite peut conduire à une réduction significative du coût numérique. Dans cet article nous proposons une nouvelle méthodologie basée sur un couplage entre les méthodes d'échantillonnage adaptatif et la réduction de modèles. Nous appliquerons cette nouvelle méthodologie sur un calcul de la probabilité de défaillance basée sur le critère de défaillance de Tsai-Hill pour un stratifié sollicité par un chargement complexe.*

### ABSTRACT.

*Adaptive sampling based reliability analysis methods are used to reduce the computational cost. However these methods can remain very expensive as the numerical models complexity is increased in order to reproduce the real response of the mechanical systems. An idea to reduce time-demanding full system resolutions is to use reduced-basis solutions. A new method based on the combination of adaptive sampling based reliability analysis and reduced-basis modeling is proposed in this article. An application is presented to the estimation of the probability of failure of a laminated plate under complex loading based on the failure criterion of Tsai-Hill.*

MOTS-CLÉS : probabilité de défaillance, Krigeage, éléments finis, réduction de modèles, base réduite

KEYWORDS: reliability analysis, Kriging, finite elements, reduced order model, reduced basis

---

### Introduction

Les problèmes d'analyse de fiabilité sur des structures complexes sont souvent numériquement coûteux à résoudre malgré l'utilisation de surfaces de réponse ou métamodèles pour remplacer les simulations numériques. Les approches d'analyse de fiabilité par des méthodes d'apprentissage actif, connues également sous le nom de méthodes par échantillonnage adaptatif, permettent de construire et d'enrichir un métamodèle de Krigeage itérativement, en utilisant la structure d'incertitude du Krigeage. A chaque itération, le meilleur candidat pour la prochaine simulation est déterminé en utilisant uniquement le modèle de substitution, puis il est ensuite évalué par le modèle numérique. Bien que réduisant significativement le nombre de simulations, ces algorithmes utilisent toutefois une évaluation du modèle numérique complet à chaque itération. Cependant, il n'est pas toujours nécessaire d'avoir la précision numérique complète sur l'ensemble du domaine parcouru. Par exemple, dans les zones du domaine éloignées de l'état limite, une estimation approximative de la solution peut être suffisante pour préciser le comportement du système à cet endroit du domaine.

Afin de réduire encore les coûts de calcul, l'idée développée dans cet article est de construire de manière adaptative un modèle réduit qui pourra être utilisé en certains points à la place du modèle numérique complet. Nous considérerons ici des modèles en base réduite qui consistent en la construction d'une base réduite et la résolution du problème projeté dans cette base de plus petite dimension [Benner et al. (2015), Kerschen et al. (2005)].

Le but de cet article est alors de présenter une nouvelle méthode d'analyse de fiabilité basée sur différents niveaux de fidélité. Cette approche est basée sur un couplage entre les méthodes d'échantillonnage adaptatif et la réduction de modèles, et s'appuie notamment sur un couplage récent, suivant la même philosophie, pour des problèmes d'optimisation [Soilahoudine et al. (2017)].

La suite de l'article est organisée comme suit. Dans une première partie, nous exposerons la problématique. Dans un deuxième temps, la méthode d'échantillonnage adaptatif AK-MCS [Echard et al. (2011)] ainsi que la méthode de modélisation en base réduite seront présentées. La nouvelle méthodologie proposée sera ensuite détaillée. Enfin nous illustrerons l'approche par une application de la méthode au calcul de la probabilité de défaillance d'une plaque composite soumise à un chargement complexe.

## Problématique

Nous considérons des problèmes mécaniques complexes, coûteux numériquement et qui nécessitent la résolution d'équations différentielles (par la méthode des éléments finis par exemple).

La défaillance d'une structure est caractérisée par la fonction de performance, notée  $G$ . Une valeur négative de cette fonction signifie que le système mécanique n'est plus fonctionnel. La probabilité de défaillance du système  $P_f$  est donnée par la formule suivante :

$$P_f = \int \mathbf{1}_{\{G(x) \leq 0\}} f_X(x) dx = \mathbb{E} [\mathbf{1}_{\{G(x) \leq 0\}}] \quad (1)$$

où  $X$  est le vecteur aléatoire des entrées du problème et  $f_X$  sa densité de probabilité.

Cette intégrale peut être approximée en utilisant la méthode de Monte-Carlo mais pour le type de problème considéré ici le coût de calcul est rédhibitoire. Les méthodes d'apprentissage actif permettent de construire un métamodèle de Krigeage sur la fonction de performance, noté  $\hat{G}$ . La valeur de la probabilité de défaillance peut alors être approchée par :

$$\hat{P}_f = \int \mathbf{1}_{\{\hat{G}(x) \leq 0\}} f_X(x) dx \quad (2)$$

Ainsi en couplant la méthode de Monte-Carlo et le Krigeage une estimation de la probabilité de défaillance est obtenue en fonction de la taille de la population de Monte-Carlo  $n_{MC}$  et du nombre d'échantillons  $n_{\hat{G} \leq 0}$  se trouvant dans le domaine de défaillance :

$$\hat{P}_f \simeq \frac{n_{\hat{G} \leq 0}}{n_{MC}} \quad (3)$$

L'estimation de la probabilité de défaillance est évidemment dépendante de la population de Monte-Carlo utilisée. Le coefficient de variation de  $P_f$  C.O.V.  $P_f$  caractérise la variabilité due à l'échantillonnage :

$$\text{C.O.V. } P_f = \sqrt{\frac{(1 - P_f)}{P_f n_{MC}}} \quad (4)$$

## Méthodes d'échantillonnage adaptatif

Différentes méthodes d'échantillonnage adaptatif basées sur le Krigeage ont été proposées dans la littérature comme par exemple les méthodes Efficient Global Reliability Method (EGRA) [Bichon et al. (2008)], Krigeage et importance sampling combinés [Balesdent et al. (2013)] ou Active learning reliability method combining Kriging and Monte Carlo Simulation (AK-MCS) [Echard et al. (2011)]. Dans ce papier, nous utiliserons la méthode AK-MCS.

### Brève description de la méthode AK-MCS

La méthode AK-MCS est une méthode adaptative de calcul de probabilité de défaillance. Cette méthode est basée sur l'interpolation de la fonction de performance par Krigeage et la méthode de Monte-Carlo. L'algorithme AK-MCS a pour objectif de classer une population de Monte-Carlo, notée  $S$ , sans faire appel à la réponse du système en chacun des points. Les différentes étapes sont résumées sur la Fig. 1.

La méthode débute par le choix d'un plan d'expériences (noté  $D$  dans la Fig. 1 avec  $D \subset S$ ) initial (de taille  $N$ ) appartenant au tirage de Monte-Carlo et cherche ensuite à enrichir itérativement un métamodèle de Krigeage par l'intermédiaire d'une fonction d'apprentissage. À chaque itération, un critère d'arrêt lié à l'apprentissage est calculé. Si ce critère est vérifié l'apprentissage est alors stoppé et le métamodèle est jugé suffisamment précis pour la population  $S$ . Il faut alors vérifier si la population est assez grande pour que le coefficient de variation sur l'estimation de la probabilité de défaillance  $C.O.V.P_f$  soit suffisamment faible. Si ce critère est trop élevé, de nouveaux points venant d'une autre population de Monte-Carlo sont ajoutés à  $S$  et l'apprentissage de la fonction de performance reprend jusqu'à ce que le critère d'arrêt lié à l'apprentissage soit à nouveau atteint.

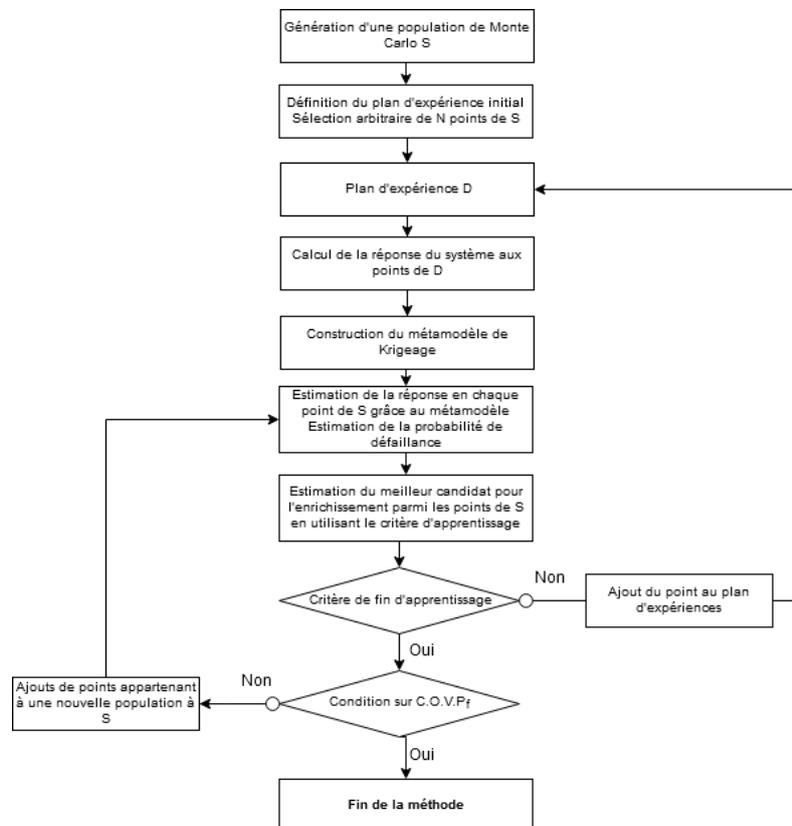


Fig. 1 : Organigramme de la méthode AK-MCS

L'évaluation de chacun des points du plan d'expériences servant à la construction du Krigeage nécessite de résoudre le modèle numérique. Afin de réduire les temps de calcul représentés par les appels successifs au modèle numérique complet nous proposerons dans les sections suivantes l'utilisation de modèle en base réduite, construits de manière adaptative.

### Modélisation en base réduite

Dans le cadre de la mécanique linéaire des structures, la discrétisation (par la méthode des éléments finis par exemple) de l'équation d'équilibre statique et l'application des conditions aux limites conduisent au système matriciel suivant :

$$KU = F \quad (5)$$

où  $K$  est la matrice de rigidité,  $U$  le vecteur déplacement et  $F$  la résultante des forces.

Les modèles réduits par projection visent alors à résoudre ces équations en projection sur une base réduite. Le problème de l'équation (5) projeté dans une base réduite  $\Phi = \{\Phi_1, \dots, \Phi_m\}$  s'écrit :

$$\Phi^T K \Phi \alpha = \Phi^T F \quad (6)$$

où  $\alpha$  est le vecteur des coefficients du vecteur déplacement  $U$  dans la base réduite  $\Phi$ . Résoudre l'équation (6) revient à inverser un système de la taille de la matrice de rigidité réduite  $\Phi^T K \Phi$  et donne le vecteur  $\alpha$ . Notons que cette taille est très faible (des bases réduites de plus que quelques dizaines d'éléments sont rares) alors que la taille initiale de la matrice de rigidité est égale au nombre de degrés de libertés du modèle numérique, qui pour des problèmes éléments finis de grande taille peut facilement atteindre plusieurs millions. On obtient in fine l'approximation de la solution dans la base réduite  $U_B = \Phi \alpha$  dont on peut quantifier la validité grâce au résidu suivant :

$$e_{rb}^2 = \frac{\|K\Phi\alpha - F\|^2}{\|F\|^2} \quad (7)$$

### Nouvelle méthodologie

Nous proposons d'utiliser une nouvelle méthodologie d'analyse de fiabilité en couplant une approche par échantillonnage adaptatif à la modélisation en base réduite permettant ainsi de réduire significativement les coûts de calcul. La Fig. 2 présente cette méthodologie dans le cas où la méthode d'échantillonnage adaptatif choisie est la méthode AK-MCS.

La méthode débute par la génération d'une population de Monte-Carlo et la définition d'un plan d'expériences initial, noté  $D$  (avec  $D \subset S$ ), dans le domaine d'intérêt. La base réduite est initialisée en calculant la réponse du modèle numérique complet au premier point de  $D$  qui devient donc le premier élément de la base réduite  $\Phi$  après normalisation.

Par la suite en chaque point à évaluer une solution en base réduite est d'abord calculée. Si la valeur du résidu  $e_{rb}$  de l'équation (7) est inférieure à un seuil fixé, la solution en base réduite est utilisée pour enrichir le métamodèle. Dans le cas contraire la résolution du modèle complet est nécessaire et sert à mettre à jour le métamodèle ainsi que la base réduite  $\Phi$  après que la solution a été orthonormalisée.

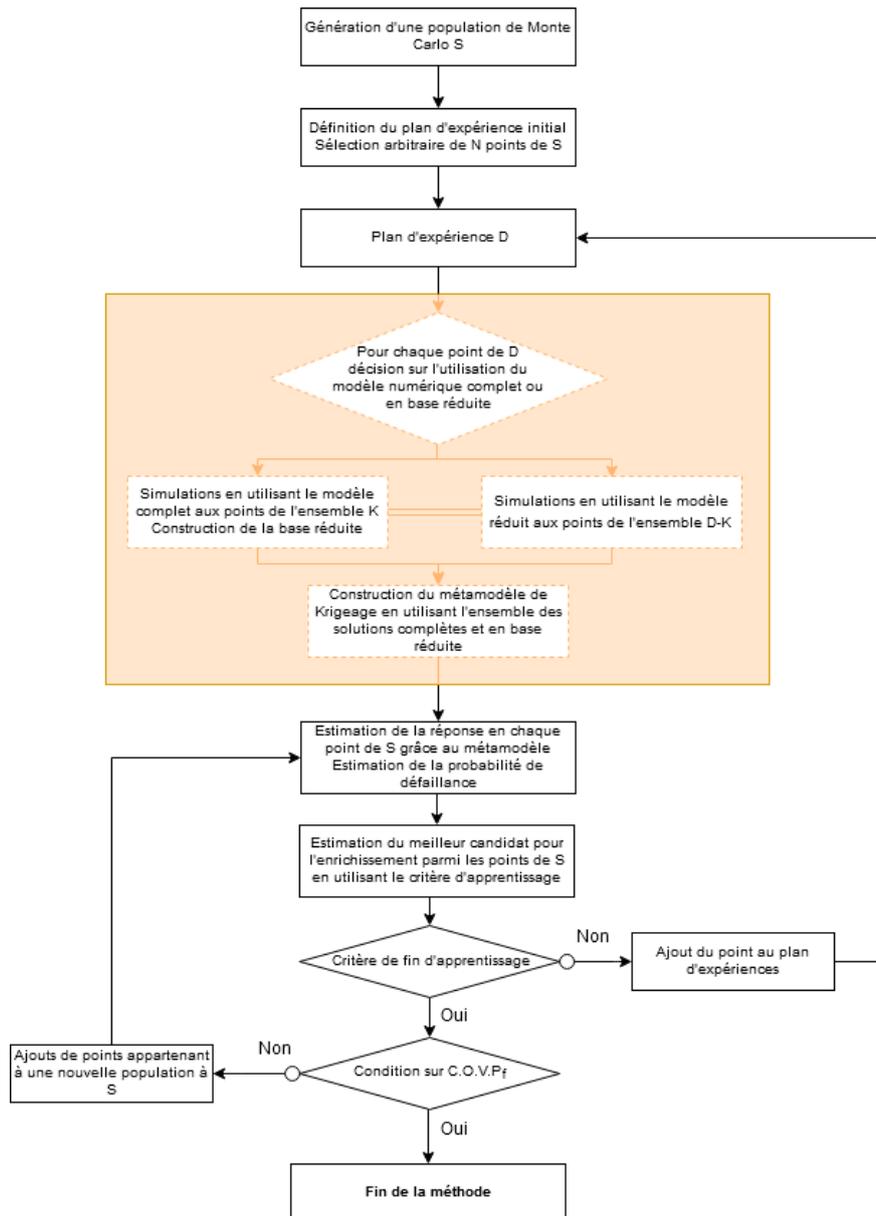


Fig. 2 : Méthode d'analyse de fiabilité combinant AK-MCS et la modélisation en base réduite

En se basant sur ce critère d'enrichissement, le modèle complet est calculé en un ensemble K de points de D et pour l'ensemble des points restants, notés D-K, le modèle réduit projeté dans la base  $\Phi$  est utilisé. Une fois le métamodèle initial construit, l'algorithme d'échantillonnage adaptatif choisi permet d'enrichir le métamodèle de Krigeage. Le même critère de décision est utilisé pour chaque nouveau point afin de décider entre le modèle complet ou le modèle réduit. In fine la probabilité de défaillance est calculée.

### Application à la rupture d'un plaque composite

Pour illustrer la nouvelle méthodologie proposée, nous l'avons appliquée au cas d'une plaque composite stratifiée trouée soumise à un chargement complexe (combinaison de flexion et de cisaillement) dont la défaillance est identifiée par le calcul du critère de Tsai-Hill. L'étude a

porté sur la probabilité de défaillance de la plaque. Plus précisément, le cas considéré pour notre application est celui d'une plaque trouée, encadrée sur un côté et soumise à une pression uniformément répartie sur la partie supérieure et du cisaillement sur le côté opposé au côté encadré (voir Fig. 3).

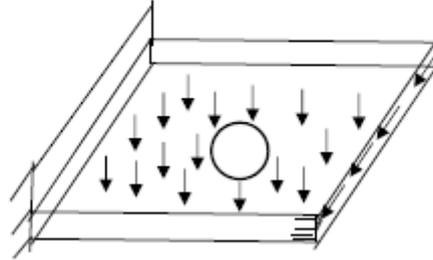


Fig. 3 : Conditions aux limites et chargement pour l'application

Les variables incertaines sont les quatre propriétés élastiques orthotropes : le module de Young dans le sens longitudinal ( $E_1$ ), dans le sens transversal ( $E_2$ ), le coefficient de Poisson ( $\nu_{12}$ ) et le module de cisaillement ( $G_{12}$ ). Les lois suivies par les variables incertaines sont données en Tab. 1. Un code éléments finis est utilisé pour calculer les contraintes mécaniques dans la structure. La fonction objectif est formulée par la relation entre les contraintes calculées et est donnée par le critère de Tsai-Hill qui s'écrit de la façon suivante :

$$\left(\frac{\sigma_L}{X^*}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_T}{Y^*}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{LT}}{S}\right)^2 - \frac{\sigma_L \sigma_T}{X^{*2}} < 1 \quad (8)$$

où  $\sigma_L$ ,  $\sigma_T$  et  $\tau_{LT}$  sont respectivement les contraintes longitudinales, transversales et de cisaillement dans le repère du pli et  $X^*$ ,  $Y^*$  et  $S$  sont respectivement les résistances ultimes longitudinales (i.e. parallèlement aux fibres), transversales (i.e. perpendiculairement aux fibres) et en cisaillement.

Tab. 1 : Lois et paramètres des variables incertaines

Variable	Loi	Moyenne	Coefficient de variation
$E_1$	Normale	181 GPa	5%
$E_2$	Normale	10,3 GPa	5%
$\nu_{12}$	Normale	0,28	5%
$G_{12}$	Normale	7,17 GPa	5%

En premier lieu, la probabilité de défaillance a été calculée à l'aide d'AK-MCS pour une population de Monte-Carlo de  $2.10^6$  points et un plan d'expériences initial de 15 points. L'algorithme échantillonne 20 points supplémentaires pour construire le métamodèle et donne une probabilité de défaillance de  $1,6635.10^{-3}$  avec un coefficient de variation de 1.74%.

Pour ce problème, nous comparons les résultats donnés par la nouvelle méthodologie et AK-MCS pour des mêmes plans de Monte-Carlo en faisant varier uniquement le seuil fixé sur le de l'équation (7). On peut observer la différence entre la valeur de la probabilité de

défaillance déterminée par AK-MCS  $P_{f_{AK-MCS}}$  et les valeurs estimées en utilisant la méthodologie proposée  $P_{f_{RB}}$  en regardant l'écart relatif :  $\left| \frac{P_{f_{AK-MCS}} - P_{f_{RB}}}{P_{f_{AK-MCS}}} \right|$ . Les Fig.4 et Fig. 5 donnent respectivement l'évolution de cet écart relatif ainsi que le pourcentage d'appels au modèle numérique complet sur tous les points évalués dans AK-MCS en fonction du seuil fixé pour trois populations de Monte-Carlo distinctes. Notons ainsi que la méthodologie proposée dans cet article permet de réduire le nombre de résolutions du modèle numérique complet jusqu'à un facteur 7 (pour un seuil fixé à  $e_{rb}=10^{-3}$ ) tout en maintenant un écart relatif à l'approche AK-MCS faible devant la variabilité liée à l'échantillonnage.

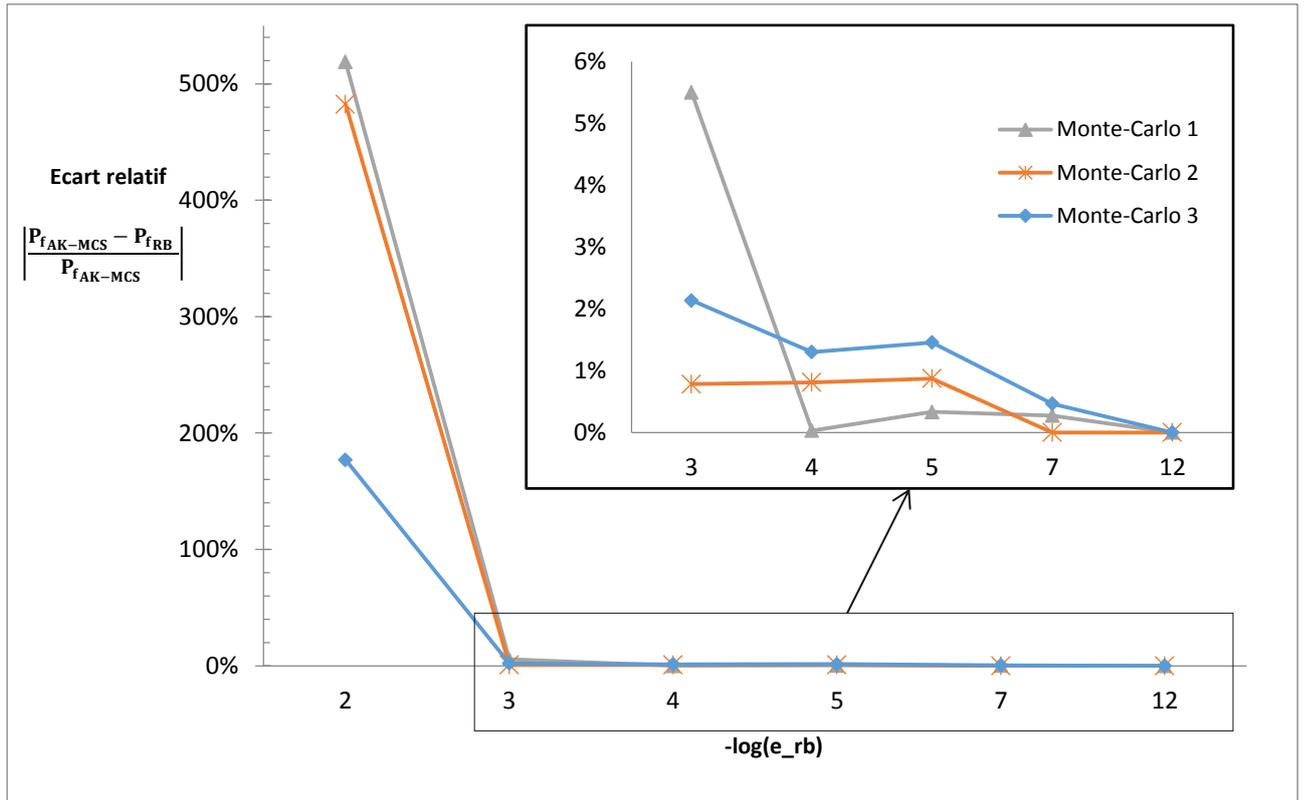


Fig. 4 : Evolution de l'écart relatif en fonction du seuil fixé

On constate ainsi qu'à partir d'un seuil  $e_{rb}$  fixé à  $10^{-3}$  la dispersion entre les valeurs de la probabilité de défaillance est du même ordre de grandeur, voire inférieure au coefficient de variation de  $P_f$  pour AK-MCS.

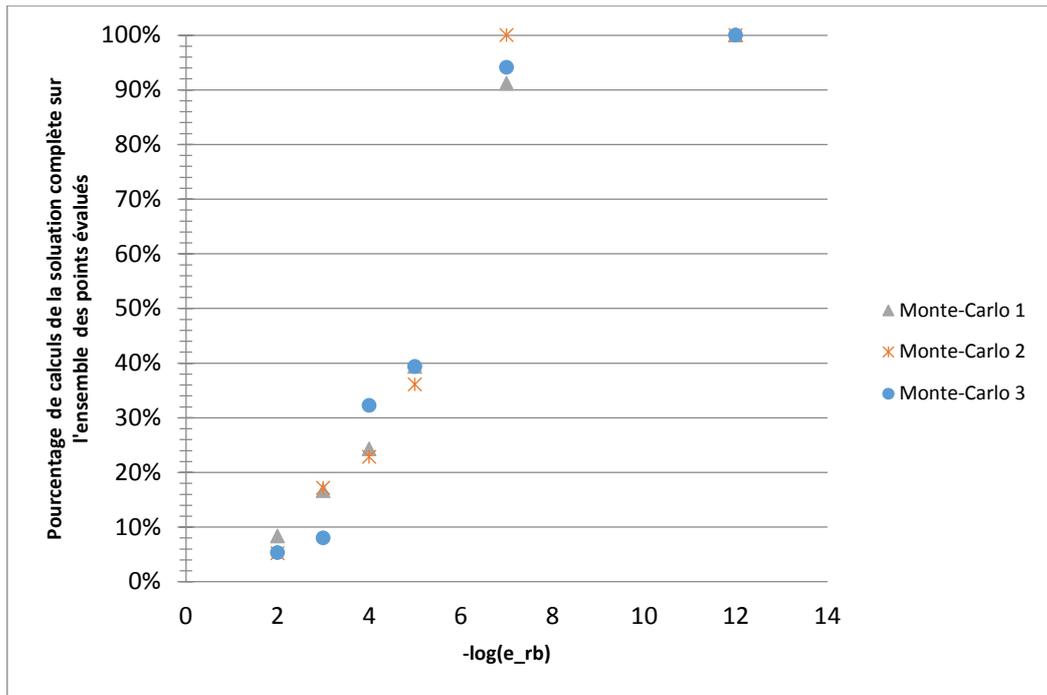


Fig. 5 : Gain sur le nombre d'évaluations du modèle complet en fonction du seuil fixé

### Conclusion et perspectives

Une nouvelle méthode d'analyse de fiabilité visant à réduire les temps de calcul en combinant les méthodes d'échantillonnage adaptatif et la réduction de modèles a été présentée. Cette méthode consiste à construire une base réduite de faible dimension. Le modèle numérique complet a donc besoin d'être résolu qu'un faible nombre de fois durant l'exécution de l'algorithme puisque les autres échantillons sont évalués par projection dans la base réduite.

L'efficacité de ce couplage est illustrée sur une application de la méthode au calcul de la probabilité de défaillance d'une plaque composite soumise à un chargement complexe. Comparé à l'utilisation de l'algorithme AK-MCS qui nécessite de résoudre le problème complet à chaque itération, la nouvelle méthode montre un fort potentiel de réduction du coût numérique. Sur cette application elle a permis de réduire jusqu'à un facteur 7 le nombre d'appels au modèle numérique complet.

Ces premiers résultats semblent particulièrement prometteurs et restent à valider pour des problèmes de grande dimension stochastique et physique permettant ainsi de réduire de façon très significative les temps de calcul. Il reste également à quantifier l'erreur due à la base réduite sur la probabilité de défaillance.

### Références

- Echard B., Gayton N., Lemaire M. (2011) AK-MCS: An active learning reliability method combining Kriging and Monte Carlo Simulation, *Structural Safety*, 33(2), 145-154
- Balesdent M., Morio J., Marzat J. (2013). Kriging-based adaptive importance sampling algorithms for rare event estimation. *Structural Safety*, 44, 1-10.

Kerschen G., Golinval J.C., Vakakis A.F., Bergman L.A. (2005). The method of proper orthogonal decomposition for dynamical characterization and order reduction of mechanical systems: an overview, *Nonlinear dynamics*, 41(1-3), 147-169.

Benner P., Gugercin S., Willcox K. (2015). A survey of projection-based model reduction methods for parametric dynamical systems. *SIAM review*, 57(4), 483-531.

Soilahoudine M., Gogu C., Bes C. (2017). Accelerated adaptive surrogate based optimization through reduced order modeling. *AIAA Journal*, Vol. 55, No. 5, pp. 1681-1694.

Bichon B.J., Eldred M.S., Swiler L.P., Mahadevan S., McFarland J.M. (2008). “Efficient global reliability analysis for nonlinear implicit performance functions”. *AIAA Journal*, 46:2459–68.